Л 15. Несобственные интегралы. Примеры

Цель лекции: познакомить студентов с понятием несобственного интеграла, научить различать виды несобственных интегралов, вычислять их через пределы определённых интегралов и применять признаки сходимости для анализа таких интегралов.

Основные вопросы

- Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
- Несобственные интегралы от разрывных функций.
- Несобственный интеграл как предел определённых интегралов.
- Сходимость и расходимость несобственных интегралов.
- Примеры вычисления несобственных интегралов.
- Признаки сходимости.

Краткое содержание: лекция рассматривает определение несобственного интеграла как предела определённых интегралов при выходе верхнего или нижнего предела к бесконечности или при подходе к точке разрыва. Показано, как вычислять такие интегралы с помощью первообразной. Изучаются способы определения сходимости несобственных интегралов, включая сравнение с эталонными интегралами и предельный признак сравнения.

В случае если область интегрирования представляет из себя неограниченный промежуток или если функция имеет разрыв 2-го рода в своей области интегрирования, введенное выше понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм не применимо, а определенные интегралы в этих случаях определяют следующим образом.

§1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$. Несобственным интегралом от a до $+\infty$ от этой функции называется предел:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует (равен числу), то несобственный интеграл называется сходящимся; если он не существует, то интеграл называется расходящимся. В случае, если $f(x) \ge 0$ в промежутке $[a,+\infty)$, такой интеграл выражает площадь неограниченной фигуры с границами: $y = 0$, $x = a$ $(x \ge a)$ и графиком функции $y = f(x)$. Для сходящегося интеграла эта площадь конечна, для расходящегося – бесконечна.

Практически эти интегралы удобно находить с помощью следующего следствия из теоремы Ньютона – Лейбница.

Следствие 1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$ и $y = F(x)$ - ее первообразная, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Пример1. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\ln x - \ln 1 = \infty.$

Следовательно, этот интеграл расходится.

Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\infty, b]$. Тогда несобственным интегралом от $-\infty$ до b называется предел

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Такой интеграл (при $f(x) \geq 0$) выражает площадь фигуры с границами:

$$y = 0, \quad x = b \quad (x \leq b) \quad \text{и} \quad y = f(x).$$

Следствие 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\infty, b]$ и $y = F(x) -$ ее первообразная, тогда

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то ***несобственным интегралом*** *от* $-\infty$ *до* $+\infty$ называется следующая сумма двух интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

(здесь c -некоторое число). Это определение не зависит от выбора c. Такой интеграл называется ***сходящимся***, если сходятся оба интеграла:

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *называется* ***расходящимся***. При $f(x) \geq 0$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ выражает площадь области с границами $y = 0$ и $y = f(x)$.

Следствие 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и $y = F(x)$ ее первообразная. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

Пример 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

§2 Несобственные интегралы от разрывных функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b)$ и имеет разрыв в точке b. Несобственным интегралом от a до b слева от этой функции называется предел слева

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx .$$

Иногда такой интеграл обозначают также через $\int_a^{b} f(x)dx$.

Следствие 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b)$ и $y = F(x)$ - ее первообразная в этом промежутке, то

$$\int_a^{b-} f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x \to b-0} F(x) - F(a).$$

Пример 3.

$$\int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{0} = \lim_{x \to 0-0} \ln|x| - \ln|-1| = -\infty - 0$$

т.е. интеграл расходится.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,b]$ и имеет разрыв в точке a, то несобственным интегралом от a справа до b от этой функции называется предел справа

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx .$$

Следствие 5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,b]$ и $y = F(x)$ -ее первообразная в этом промежутке, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{x \to a+0} F(x).$$

Следующий случай самый коварный, поскольку запись этих несобственных интегралов не отличается от записи определенных интегралов от непрерывных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в отрезке $[a,b]$ за исключением точки c из интервала (a,b), в которой функция имеет разрыв. *Тогда несобственным интегралом по этому отрезку* называется следующая сумма двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Такой интеграл называется сходящимся только в том случае, когда сходятся оба записанных справа интеграла.

Пример 4.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}.$$

Как показано выше, интеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ расходится, следовательно и $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ также расходится. Нахождение этого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}$$

не верно, поскольку подынтегральная функция $y=\frac{1}{x}$ имеет разрыв в точке 0.

§3 Признаки сходимости несобственных интегралов

Для того чтобы ответить на вопрос сходится или нет данный несобственный интеграл, совершенно не обязательно его вычислять. Установить сходимость интеграла можно с помощью следующих теорем, в которых исследуемый интеграл сравнивается с известным сходящимся или расходящимся интегралом. Эти теоремы называются признаками сходимости. Для определенности сформулируем эти признаки для интегралов вида $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$, хотя они верны для всех типов несобственных интегралов.

Теорема (Первый признак сравнения)

Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в промежутке $[a,+\infty)$ и в этом промежутке выполняется неравенство $0\le f(x)\le g(x)$.

Верны следующие утверждения

а) Если $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ также сходится и $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\le\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$.

б) Если $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ также расходится.

Пример 5. Исследуем сходимость интеграла $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^5+1}$. В промежутке $[1,+\infty)$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^5+1}\le\frac{1}{x^5}$, обе функции непрерывны и

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=\frac{x^{-6}}{-6}\Big|_{1}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{6x^6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\qquad(\ne\infty).$$

Тогда по первому признаку сравнения исходный интеграл сходится.

Теорема (предельный признак сходимости)

Пусть неотрицательные в промежутке $[a,+\infty)$ функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывны в этом промежутке и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A,$$

который не равен 0 и ∞. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Пример 6. Исследуем сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{(\sqrt{x}+1)dx}{x^2+x+1}$. Заметим, что функция

$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$ непрерывна в промежутке $[1,+\infty)$. Отбросим в числителе и знаменателе этой

функции члены с меньшими степенями и получим функцию $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-1,5}$. Поскольку

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}:x^{-1,5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^{-1,5}}{x^2+x+1}=1$$

и интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1,5}}=\left.\frac{x^{-0,5}}{-0,5}\right|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-0,5}}{0,5}+2=2$$

сходится, то исходный интеграл также сходится по предельному признаку сходимости.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют несобственным интегралом?
2. Как определяется несобственный интеграл с бесконечным пределом?
3. Что означает «интеграл сходится» и «интеграл расходится»?
4. Как вычислять несобственный интеграл при разрыве подынтегральной функции?
5. В каких случаях нельзя применять формулу Ньютона–Лейбница напрямую?
6. Сформулируйте первый признак сравнения.
7. Сформулируйте предельный признак сравнения.
8. Приведите пример несобственного интеграла, который сходится.
9. Приведите пример несобственного интеграла, который расходится.

Литература

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу